

## Resolução ARTESP nº 001, de 25 de março de 2013.

Dispõe sobre o Fluxo de Caixa Marginal para novos investimentos nas concessões.

O CONSELHO DIRETOR DA **AGÊNCIA DE TRANSPORTE DO ESTADO DE SÃO PAULO – ARTESP**, no uso de suas atribuições que lhes foram conferidas pela Lei Complementar nº 914, de 14 de janeiro de 2002 e regulamentos, e considerando a Nota Técnica nº 1/2013/DCE/ARTESP, a Consulta Pública nº 01/2012 e o Processo Artesp nº: 013.654/2012, RESOLVE:

Art. 1º Estabelecer a metodologia de cálculo das variáveis da fórmula do Custo Médio Ponderado de Capital – CMPC, também chamado de *Weighted Average Cost of Capital – WACC* na linguagem técnica, representada matematicamente no Anexo I desta Deliberação.

Art. 2º Para fins e efeitos desta Resolução considera-se:

I - Estrutura de capital: proporção entre o capital próprio (E) e o capital de terceiros (D) das empresas;

II- Capital próprio: porção do capital da empresa aportado pelos acionistas e/ou proprietários, chamado de *equity* (E) pela linguagem técnica;

III- Capital de terceiros: porção do capital da empresa referente às obrigações que a empresa tem com aqueles que não são seus proprietários e/ou acionistas, chamado de *debt* (D) pela linguagem técnica;

III - Custo de capital efetivo: custo deflatado de cada componente das fontes de recursos da empresa, seja capital próprio, seja capital de terceiro;

IV - CMPC: média ponderada entre o custo do capital próprio e do custo do capital de terceiros em que o fator de ponderação é a participação em termos relativos na composição do capital total da empresa (“passivo total”);

V - Soma dos Resíduos Quadráticos: critério estatístico em que se elevam ao quadrado as distâncias entre o ocorrido *versus* o previsto, para evitar que, ao somar essas distâncias, erros positivos se anulem com erros negativos.

Art. 3º A taxa anual de desconto a ser utilizada nos fluxos dos dispêndios e das receitas marginais para efeito de equilíbrio econômico-financeiro em novos investimentos para nas concessões será calculada com base na fórmula constante do Anexo I desta Resolução.

§1º O custo de capital próprio utilizado para o cálculo da taxa de desconto referida no *caput* será calculado com base em modelo multifatorial escolhido pela soma dos resíduos quadráticos.

§2º O processo de desenvolvimento dos modelos candidatos e do modelo escolhido está descrito no Anexo II desta Resolução.

§3º As variáveis e os parâmetros a ser utilizados nas fórmulas estabelecidas no art.3º serão calculados com base na metodologia apresentada no Anexo II desta Resolução.

Art. 4º A taxa anual de desconto a ser utilizada nos fluxos dos dispêndios e das receitas marginais para efeito de equilíbrio econômico-financeiro será constante por toda a extensão temporal do mesmo, estabelecida e vigente no tempo de celebração do contrato entre as partes envolvidas, para novos investimentos nas concessões.

Art. 5º Para efeito referencial para novos contratos, a taxa a que se refere o artigo 3º deverá ser atualizada anualmente.

Art. 6º Esta Resolução entra em vigor na data da sua publicação.

**ANEXO I da Resolução**

Custo Médio Ponderado de Capital – CMPC

$$CMPC = \frac{E}{D + E} R_E + \frac{D}{D + E} R_D (1 - T)$$

Onde:

**E – capital próprio;**

**D – capital de terceiros;**

**$R_E$  – custo efetivo de capital próprio;**

**$R_D$  - custo efetivo de capital de terceiros; e**

**T – impostos sobre a renda.**

## ANEXO II da Resolução

### NOTA TÉCNICA Nº 1/2013/DCE/DAI/ARTESP

**Interessados:** ARTESP, concessionárias, investidores e usuários.

**Protocolo ARTESP:** 211.042/12

**Processo ARTESP:** 013.654/2012

São Paulo, 1º de março de 2013.

**Assunto:** Consolidação de Metodologia para o estabelecimento do fluxo de caixa marginal das concessionárias de Rodovias do Estado de São Paulo para remuneração de novos investimentos nas concessões.

A presente Nota Técnica é resultado de estudo previamente apresentado pela Nota Técnica nº 1/2012/DCE/DAI/ARTESP, consolidado após consulta pública realizada no período de 29/08/2012 a 28/09/2012.

Foram recebidas 3 (três) contribuições (fls. 187/198), as quais foram acolhidas, exceto naquilo que alterava a essência da proposta metodológica.

#### I. Do Objeto

1. Trata-se de proposição de metodologia para estabelecimento do fluxo de caixa marginal para remuneração de novos investimentos nas concessões, que considera as condições macroeconômicas contemporâneas vigentes balizadoras de decisão de investimento. Esta metodologia iguala a Taxa Interna de Retorno – TIR ao resultado do Custo Médio Ponderado de Capital – CMPC<sup>1</sup>.

2. O fluxo de caixa marginal é composto por suas respectivas linhas de receitas, despesas, custos, investimentos, tributos, amortizações, depreciações e financiamentos, assim como da sua TIR.

Nesta proposição, apresentou-se metodologia de cálculo dos componentes do fluxo de caixa marginal e, posteriormente, foi estimado o custo do capital próprio, analisados o custo do capital de terceiros e a estrutura de capital, e utilizado o critério de *backtest* para a escolha do melhor modelo de custo de capital próprio.

---

<sup>1</sup>Esta Nota Técnica tomou por base as conclusões apresentadas em relatório de consultoria prestada pela Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas –FIPE – anexo I.

3. A implementação da metodologia a seguir proposta pretende viabilizar investimentos não contemplados no fluxo de caixa constante das propostas vencedoras de concessões, uma vez que a TIR e a respectiva alocação de riscos representarão melhor o contexto econômico financeiro motivador das decisões dos investidores, bem como o custo de oportunidade para o Poder Concedente.

## II. Definição dos Termos e Notações

**“Backtest”**- consiste em testar um modelo através da aplicação dele em dados passados, dados estes diferentes daqueles utilizados para a obtenção do próprio modelo, ou seja, uma simulação da capacidade preditiva do modelo a partir de dados passados.

**“Capital próprio”, “Capital dos acionistas” ou “Equity” (E)** – porção do capital da empresa (fonte de recursos / passivo) aportado pelos acionistas / proprietários;

**“Capital de Terceiros”, “Dívida” ou “Debt” (D)** – porção do capital da empresa (fonte de recursos / passivo) referente às obrigações que a empresa tem com aqueles que não são proprietários / acionistas da mesma;

**“Contrato de Opção”** – contrato aleatório pelo qual o comprador adquire o direito, negociável e transferível, de executar uma transação dentro de uma janela de tempo pré-determinada, a um valor pré-estabelecido por ambas as partes. Para a precificação de um contrato de opção, o modelo mais amplamente utilizado é o modelo de *Black-Scholes*<sup>2</sup>, que leva em consideração – em linhas gerais – a volatilidade que as partes consideram (volatilidade implícita no preço); o tempo de vencimento do contrato; taxa de juros livre de risco; o preço de exercício do direito que as partes pactuam e; o preço atual do ativo subjacente. Este tipo de precificação assume como premissa que o logaritmo dos retornos do ativo é normalmente distribuído<sup>3</sup>;

**“Custo Médio Ponderado de Capital - (CMPC)” ou “Weighted Average Cost of Capital - (WACC)”** – média ponderada entre o custo do capital próprio (“equity”), e do custo do capital de terceiros (“debt”), onde o fator de ponderação é a participação em termos relativos na composição do capital total da empresa (“passivo total”);

**“Fluxo de Caixa Marginal”** – é aquele resultante da inserção de novos investimentos e serviços não previstos no contrato original e respectivos aditivos, celebrado em novo Aditivo de comum acordo, com nova Taxa Interna de Retorno e reequilíbrio mediante extensão de prazo. Diferencia-se, portanto, do Fluxo de Caixa Original, pois este mantém todas as características e premissas do contrato original e aditivos já celebrados;

**“Impostos”** – para efeitos desta Nota Técnica, são considerados “impostos” os tributos que incidem diretamente sobre o lucro, *in casu*, a Contribuição Social sobre o Lucro Líquido (CSLL) e o Imposto de Renda (IR);

**“Lag”** - composição de períodos anteriores a ser utilizada no modelo;

---

<sup>2</sup> Paul Wilmott on Quantitative Finance – Volume 1, Wiley, Second Edition, March, 6th , 2006.

<sup>3</sup> MathWorld from Wolfram Institute - <http://mathworld.wolfram.com/NormalDistribution.html>

“**Overfitting**” - falta de capacidade do modelo em prever pontos fora da amostra utilizada para sua inferência. No caso de um sistema dinâmico, caracteriza a incapacidade do modelo em prever o futuro e somente em descrever o ocorrido;

**Somatório** -  $\sum_{i=1}^N x_i$  - denota uma soma iterada. Ou seja, realiza uma soma reiteradas vezes de cada observação da variável “x” denotada pelo subscrito “i”, até a n-ésima observação. Ex:  $\sum_{i=1}^5 x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ ;

“**Taxa Interna de Retorno – (TIR)**” – taxa em que o Valor Presente Líquido do Fluxo (VPL) de caixa é igual a zero;

“**Taxa livre de risco**” – taxa que teoricamente tem risco zero para um determinado retorno (atrelado a um ativo livre de risco). Tradicionalmente é utilizada como comparativo para tomar a decisão de investir ou não em um ativo com um determinado risco, tal que, só faz sentido investir em um ativo com risco se o seu retorno for maior do que a taxa livre de risco<sup>4</sup>. No entanto, nenhuma taxa na realidade é livre de risco, pois na prática, todo e qualquer investimento incorre no mínimo em um risco muito pequeno;

“**Variável endógena**” - aquela em que se observa uma relação mútua de causalidade com outra variável do sistema;

“**Variável exógena**” - aquela em que a relação de causalidade é unidirecional, ou seja, aquela em que variáveis do sistema não impactam nela, não obstante ela impacte no sistema;

“**Volatilidade**” – medida de variação do preço de um determinado ativo, dado pelo desvio padrão<sup>5</sup> dos preços históricos em relação à média histórica.

### III. Da Metodologia

4. Previamente à discussão referente a custos de capital e para a composição do fluxo de caixa marginal, os itens “III.1” a “III.10” apresentam a metodologia de cálculo utilizada nas projeções de tráfego, receita, custos, despesas, tributos, depreciação, amortização e financiamentos.

#### III.1. Da Metodologia para a Projeção de Tráfego

5. O método, para fins de apuração do resultado econômico-financeiro das concessionárias, consiste na utilização de um sistema dinâmico capaz de descrever sua trajetória ao longo do tempo, em função de variáveis endógenas – quais sejam, das observações mais recentes do próprio tráfego e dos níveis de serviço<sup>6</sup> (em % do total de horas

<sup>4</sup>Equity Risk Premiums (ERP): Determinants, Estimation and Implications – The 2011 Edition, Aswath Damodaran, New York University – Stern School of Business, February, 23th, 2011.

<sup>5</sup>MathWorld from Wolfram Institute - <http://mathworld.wolfram.com/StandardDeviation.html>

<sup>6</sup>Obtido conforme os padrões internacionais e considera a fluidez da via.

medidas no período) – e das variáveis exógenas – do PIB e de fatores sazonais – bem como em função de uma evolução linear determinística. Ressalve-se que não está descartada a inclusão, no futuro, de novas variáveis explicativas, desde que os novos modelos destas decorrentes tenham melhor desempenho, aferido via critério de *backtest*, ou que possíveis mudanças nas características de trafegabilidade / função de utilidade do usuário impliquem o emprego do tradicional modelo de “Quatro Estágios”, que, por sua vez, implica simulações da malha modificada.

6. Para a obtenção dos coeficientes do sistema dinâmico em questão é feita uma estimação via mínimos quadrados de um Vetor Auto Regressivo (VAR)<sup>7</sup>. As equações do método adotado constam do apêndice desta Nota.

Um sistema dinâmico sob a forma matricial é dado por<sup>8</sup>:

$$(1) Y_t = BY_{t-1} + CX_t + \beta_0 + \beta_1 \cdot t + U$$

Onde:

$Y_t$  é a matriz de observações cujas linhas são as observações em cada corte no tempo, e as colunas denotam cada índice;

$B$  é a matriz dos coeficientes do sistema dinâmico para as variáveis endógenas – a ser estimado;

$C$  é a matriz dos coeficientes do sistema dinâmico para as variáveis exógenas – a ser estimado;

$Y_{t-1}$  é a matriz dos dados de entrada (observações com atraso) das variáveis endógenas;

$X$  é a matriz dos dados de entrada (observações) das variáveis exógenas;

$\beta_0$  é a matriz de constantes determinísticas a serem adicionadas no sistema – a ser estimado;

$\beta_1$  é a matriz de constantes que modelam a tendência linear determinística do sistema – a ser estimado;

$U$  é a matriz de choques externos.

7. A fim de se normalizar o PIB em uma moeda única, para que se contemple somente o crescimento econômico real, expurgando os efeitos inflacionários e se estabeleça um denominador comum para comparação direta, o PIB é deflatado pelo índice contemporâneo da inflação acumulada (deflator oficial – IPCA), conforme a fórmula:

$$(2) PIB_{deflatado}_t = \frac{PIB_{nominal}_t}{Inflação\ Acumulada_t}$$

<sup>7</sup>Clélia, M.C.; Morettin, P.A. – Análise de Séries Temporais, 2ª Edição, Blucher, 2006;

Morettin, P.A. – Econometria Financeira: um Curso Em Séries Temporais Financeiras, 2ª Edição, Blucher, 2011;

Hamilton, J.D. – Time Series Analysis, 1<sup>st</sup> Edition, Princeton University Press, 1994;

Gujarati, D. – Basic Econometrics, 4<sup>th</sup> Edition, McGraw-Hill, 2002;

<sup>8</sup>Esta forma, por simplicidade, considera um sistema dinâmico de ordem “p” escrito sob a forma de um sistema dinâmico de ordem “1”. Para referências bibliográficas: Monteiro, L.H.A. – Sistemas Dinâmicos, 3ª Edição, Livraria da Física, 2011.

8. Para a obtenção dos dados utilizados para a inferência dos parâmetros foram observadas as séries disponíveis no site do IPEA-Data<sup>9</sup> e as séries de tráfego da ARTESP, que são públicas, de conhecimento das concessionárias.

9. Rearranjando os termos da equação (1) acima, de maneira a desconsiderar os choques externos – de natureza imprevisível – é utilizada a expressão abaixo, que considera tanto a evolução das variáveis endógenas do sistema, quanto uma projeção das variáveis exógenas, no caso, o PIB e a sazonalidade:

$$(3) Y_t = B \cdot Y_{t-1} + C \cdot X_t + \beta_0 + \beta_1 \cdot t$$

10. O parâmetro adotado para a projeção do crescimento real do PIB será a expectativa de crescimento da economia conforme Boletim Focus do Banco Central, na data base do acordo entre as partes que formaliza o fluxo de caixa marginal, e sendo revista ao longo do tempo, a fim de obter a melhor estimativa possível da ocorrência dos fatos.

11. Para analisar qual a estrutura de “lags” ideal, será utilizado o Critério de Informação de Schwarz que, basicamente, tem por característica a imposição de penalidades para o acréscimo de coeficientes a serem estimados – visto que o aumento gradual de coeficientes diminui a confiabilidade dos próprios parâmetros estimados, e contribui para o fenômeno de “Overfitting” – ponderados pela Verossimilhança do modelo, que por sua vez é uma medida de aderência do modelo através da análise da soma dos resíduos quadráticos.

A fórmula a seguir, que “condensa” em um único número o total da distância entre o ocorrido e o previsto, evitando compensações entre erros positivos e negativos, representa a função de soma dos resíduos quadráticos:

$$(4) SQR = \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

Onde:

“N” é o número de observações;

“Y<sub>i</sub>” é o observado;

“ $\hat{Y}_i$ ” é o previsto pelo modelo;

12. Já a função de Verossimilhança é dada por:

$$(5) V = -\frac{N}{2} (1 + \log(2\pi) + \log(SQR))$$

13. Assim, é possível escrever o critério de informação de Schwarz<sup>10</sup> como:

---

<sup>9</sup>Disponível em: <<http://www.ipeadata.gov.br>>.



$$(6) SIC = \frac{(k \log(N) - 2V)}{N}$$

Onde:

“k” é o número de parâmetros a serem estimados;

Conseqüentemente, quanto menor o valor do SIC, melhor o modelo e, assim, baseado neste critério, é possível escolher a melhor estrutura de “lags” para o modelo vetorial autorregressivo.

### **III.2. Metodologia para a Projeção de Receitas de Arrecadação**

14. A metodologia para a projeção de receita de arrecadação proposta consiste em fazer a projeção de tráfego, expressa em eixos-equivalentes, por praça de pedágio (ou ponto de cobrança) e multiplicá-la pela tarifa da respectiva praça de pedágio, obtendo-se, assim, as estimativas de receitas de pedágio.

Esta projeção de receita de arrecadação, resultante do tráfego projetado por praça de pedágio (ou ponto de cobrança) multiplicado pela respectiva tarifa de pedágio, será substituída pela receita de pedágio real efetivamente arrecadada, verificada periodicamente.

#### **III.2.1. Das Receitas Acessórias**

15. Como premissa para projeção de receitas acessórias, considera-se a média histórica dos 5 (cinco) anos anteriores à assinatura do aditivo relativo aos novos investimentos e serviços, ou a média histórica que esteja disponível.

### **III.3. Da Metodologia sobre o Cálculo dos Custos Médios**

16. Para o período a partir do prazo inicial do fluxo de caixa marginal, incluindo as extensões de prazo já formalizadas, serão considerados para cálculo e projeção dos custos e despesas, para efeito de apuração do prazo a ser estendido:

- a. Valores relativos aos custos e despesas contabilizados entre os cinco anos imediatamente anteriores à data base do fluxo de caixa, sendo que:
  - i. **Custos Fixos:** A média desses valores, quando relativa aos Custos Fixos, servirá como base para extensão do prazo de concessão, não sofrendo variações ou qualquer tipo de alteração.

---

<sup>10</sup> Schwarz, Gideon E. – Estimating the dimension of a model. Annals of Statistics 6 (2): 461–464, 1978.



Assim, tendo em vista a teoria microeconômica, este sistema dinâmico determinístico se embasa em restrições / pressões sobre o custo médio unitário, em cada instante de tempo, tal que:

$$CMe_t = \frac{\text{Custo Operacional Total}_t - \text{Custos Fixos}_t}{\text{Tráfego}_t}$$

21. Tendo em vista o custo médio unitário em cada período, propõe-se uma restrição natural para eficiência de custos baseada na média dos custos médios unitários passados, tomando por base os 5 (cinco) anos imediatamente anteriores ao período “t” dados por:

$$MCM_e_t = \frac{CMe_{t-5} + CMe_{t-4} + CMe_{t-3} + CMe_{t-2} + CMe_{t-1}}{5}$$

22. Ao restringir o custo médio unitário efetivo do período “t”, para que este seja menor ou igual à média dos custos médios unitários anteriores:

$$CMe_t \leq MCM_e_t$$

23. Ainda na cadeia de incentivos proposta, e para evitar distorções ou ineficiências da contratada que afetem a rentabilidade do fluxo de caixa marginal em questão, considera-se não incorporado na média do próximo instante de tempo o valor efetivo se ele for maior que a média anterior. Nesta situação, essa se repetirá (“enforcement” de custo).

E que para efeito de fluxo de caixa marginal seja considerado no período “t” a mencionada média acima, o contratante terá algum incentivo para reduzir seus custos, pois, se:

$$CMe_t < MCM_e_t$$

Ele se apropriará da diferença.

24. Ao continuarmos a análise desse cenário de redução de custos, temos:

$$MCM_e_{t+1} = \frac{CMe_{t-4} + CMe_{t-3} + CMe_{t-2} + CMe_{t-1} + CMe_t}{5}$$

Por outro lado, pela definição, se:

$$CMe_t \leq MCM_e_t$$

---

Arrow, K. J., - The Economic Implications of Learning by Doing, The Review of Economic Studies, V.29, N.3, pp.155-173, 1962;

Sheinkman, J.A.; Boldrin, M. – Learning by Doing, International Trade and Growth: A Note, Working Paper, UCLA Department of Economics, 1988;

Logo:

$$CMe_t \leq MCM_e_t \leq MCM_e_{t-1}$$

Por recorrência, temos que:

$$CMe_{t-1} \leq MCM_e_{t-1}$$

Assim, no limite, temos que:

$$CMe_t \leq CMe_{t-1} \leq CMe_{t-2} \leq CMe_{t-3} \leq CMe_{t-4} \leq CMe_{t-5}$$

25. Se, por hipótese, somente considerarmos a “fronteira” da relação acima – um cenário onde não houvesse uma tendência de redução de custos anteriores, ou seja:

$$CMe_t \leq CMe_{t-1} = CMe_{t-2} = CMe_{t-3} = CMe_{t-4} = CMe_{t-5}$$

Segue que:

$$MCM_e_{t+1} = \frac{4 CMe_{t-1} + CMe_t}{5}, \quad MCM_e_t = \frac{5 CMe_{t-1}}{5} \rightarrow MCM_e_{t+1} < MCM_e_t$$

Assim, o contratante no período “t” se apropria do respectivo ganho de eficiência, pois, por hipótese nesta análise:

$$CMe_t < MCM_e_t$$

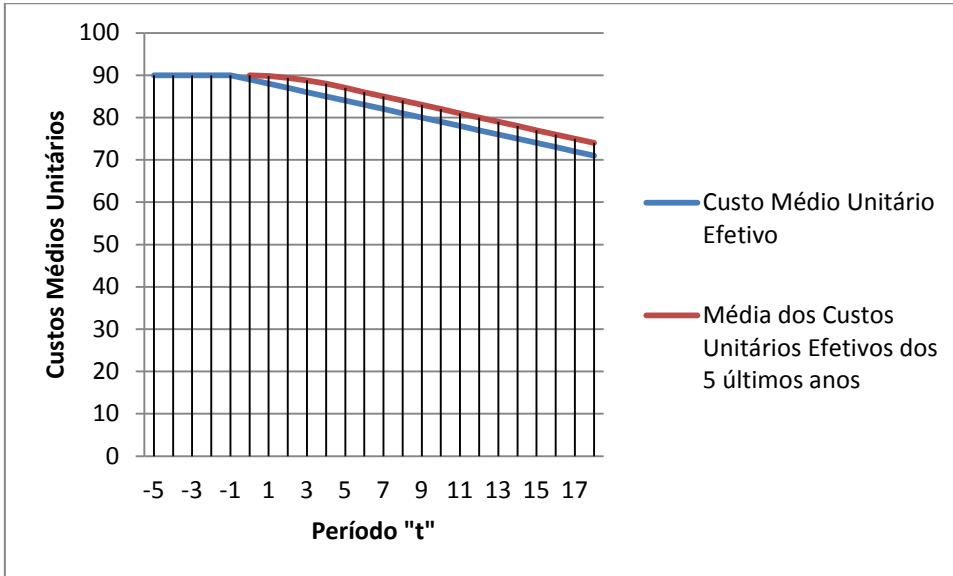
E, por conseguinte, seu ganho é dado por:

$$G_t = MCM_e_t - CMe_t$$

26. No entanto, no período subsequente, há uma captura de eficiência, pois, conforme demonstrado:

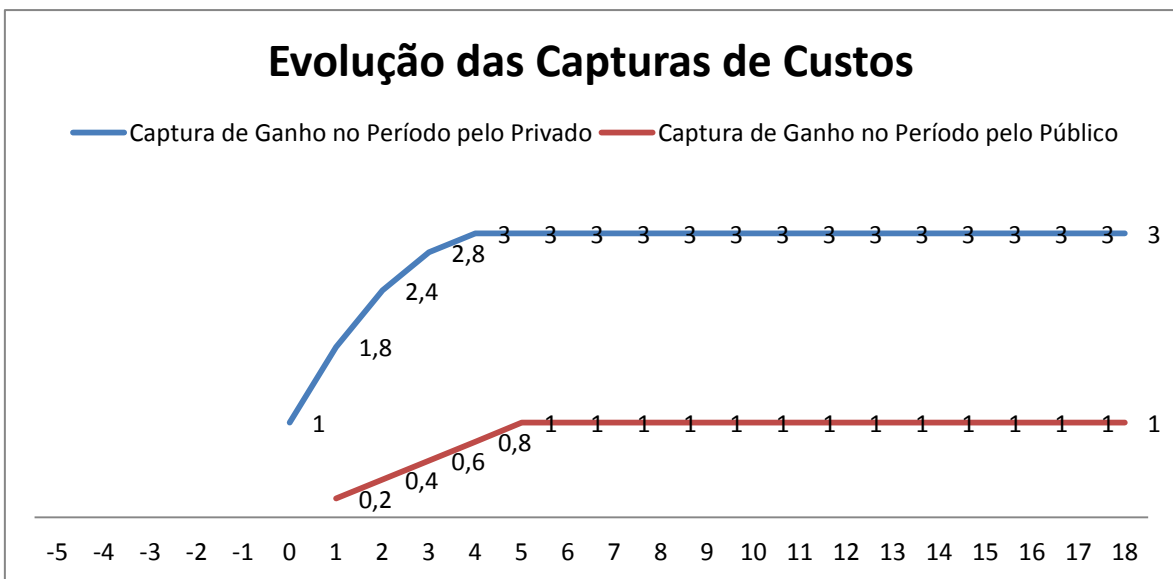
$$MCM_e_{t+1} < MCM_e_t \rightarrow CMe_{t+1} < CMe_t$$

27. Assim, em um cenário de redução de custos, fizemos uma simulação da trajetória deste sistema:



No gráfico acima se supôs que os custos médios unitários seriam de “90 dinheiros” antes de começar o fluxo de caixa marginal e haveria um decréscimo de uma unidade.

28. Logo, a evolução do ganho seria:



29. Portanto, se houver alterações de custos, não há hipótese de perda a ser computada ao poder concedente, uma vez que as consequências decorrentes de majorações nos custos são integralmente absorvidas pela contratada e, se para menos, são compartilhadas com o poder concedente, conforme descrito anteriormente. Em outros termos, não há ganho a ser capturado por nenhuma das partes no caso de aumento de custos e o custo médio unitário será constante.

#### **III.4. Dos Tributos**

30. Serão considerados, para efeito de reequilíbrio econômico-financeiro, os tributos de qualquer natureza que efetivamente incidirem durante todo o prazo do contrato de concessão, incluindo-se as extensões de prazo formalizadas.

#### **III.5. Da Depreciação e Amortização**

31. Para efeito do Fluxo de Caixa Marginal, o cálculo de Amortização e Depreciação deverá ser realizado de acordo com as normas e legislação aplicáveis.

#### **III.6. Do Empreendimento**

32. Para fins de determinação dos fluxos dos dispêndios marginais, serão utilizados critérios de mercado para estimar o valor dos novos investimentos.

33. Todos os custos e despesas, direta ou indiretamente associados aos novos investimentos serão considerados no Fluxo de Caixa Marginal, por exemplo: custos de elaboração dos projetos funcionais e executivos, custos de seguros e garantias, custos adicionais referentes a trabalho noturno, desvios e restrição de tráfego, custo por paralisações devido a questões ambientais ou aprovação de órgãos competentes, custos reais de desapropriação, compensações ambientais e remanejamento de interferências, custos reais devidos a questões geológicas e arqueológicas, e custos de fiscalização e controle do empreendimento.

34. Os investimentos que forem realizados após o prazo contratual original, necessários para a operação e manutenção dos níveis de serviços, aquisição de veículos, equipamentos e sistemas, serão objeto de reequilíbrio econômico-financeiro específico a ser pactuado entre as partes.

35. Deverão ser considerados os investimentos de conservação especial dos novos investimentos resultantes do Fluxo de Caixa Marginal até o término do período contratual, considerando os termos aditivos celebrados e a extensão resultante do Fluxo de Caixa Marginal.

#### **III.7. Dos Financiamentos**

36. Para efeito do Fluxo de Caixa Marginal, não serão considerados empréstimos, financiamentos e todas as despesas deles decorrentes.

### **III.8. Do Termo Contratual**

37. Como advento do termo contratual, considera-se o acordo com a projeção do prazo estabelecido em contrato, ou quando o Valor Presente Líquido (VPL) for igual a zero. Findo o prazo contratual, se o VPL for menor que zero, aplica-se as formas de reequilíbrio previstas em Lei.

### **III.9. Do Ônus Variável**

38. As parcelas de ônus variável previstas no Contrato de Concessão deverão ser consideradas no Fluxo de Caixa Marginal objeto desta metodologia.

### **III.10. Do Ônus Fixo**

39. Quanto ao ônus fixo, não haverá alteração da proposta original. Logo, as parcelas de ônus fixo previstas no Contrato de Concessão não serão devidas no prazo de estendido.

### **III.11. Do Custo de Capital**

40. No que concerne à discussão das taxas justas de remuneração dos projetos sujeitos ao fluxo de caixa marginal, inclusive considerando o que foi proposto pela ANTT<sup>12</sup>, o custo médio ponderado de capital é a média ponderada entre o custo dos recursos próprios aportados pelos acionistas (E) e o custo dos recursos oriundos de terceiros (D), ou seja, dívidas contraídas sob a forma de financiamentos e empréstimos.

41. O custo médio ponderado de capital pode ser expresso pela seguinte fórmula:

$$CMPC = W_d K_d (1 - T) + W_e K_e$$

Onde:

$W_d$  é o respectivo peso da participação da dívida, em valor corrente, na composição da estrutura de capital da empresa

$K_d$  é o respectivo custo da dívida, em termos reais

$T$  é a carga de impostos que incide sobre a corporação, uma vez que existe o benefício tributário no fluxo de caixa em função das despesas de juros sobre os financiamentos

$W_e$  é o respectivo peso da participação dos recursos próprios, em valor corrente, na composição da estrutura de capital da empresa

$K_e$  é o respectivo custo destes recursos próprios, em termos reais

---

<sup>12</sup>Nota Técnica ANTT 160/GEROR/2011.

### **III.12. Da Estimação do Custo de Capital de Terceiros**

42. Em relação ao capital de terceiros (D), a opção feita é a do custo efetivo das dívidas que deverão ser apuradas por meio da composição média das suas componentes e do custo de cada uma das linhas de crédito.

Assim, por exemplo, uma empresa que tenha 20% (vinte por cento) em sua composição média uma dívida contraída junto ao BNDES, com um custo atrelado à Taxa de Juros de Longo Prazo (TJLP) de 6%; e os 80% restantes da dívida contraída sob a forma de emissão de títulos (“debêntures”), a 15% (quinze por cento) nominais, resultará em um custo efetivo nominal de:

$$K_{dN} = 20\% \times 6\% + 80\% \times 15\% = 0,012 + 0,12 = 0,132 = 13,2\%$$

43. Por conseguinte, para se obter o custo da dívida em termos reais, deflata-se pelo valor esperado da inflação:

$$K_d = \frac{1 + K_{dN}}{1 + i} - 1$$

45. Assim, havendo uma metodologia para o custo do capital de terceiros (D), já consagrada na literatura atual sobre o tema, as próximas etapas são a determinação dos pesos e o cálculo da segunda componente do custo médio ponderado de capital, que é o custo dos recursos próprios (custo de “equity”).

### **III.13. Da Determinação dos Pesos da Composição da Estrutura de Capital**

46. Uma das principais discussões e um dos principais erros recorrentes em finanças<sup>13</sup> é a utilização dos valores contábeis para a apuração dos pesos mencionados anteriormente ( $W_d$  e  $W_e$ ), ao invés de considerar o valor de mercado corrente, que pode ser capturado através do valor da empresa dado por suas ações.

Isto porque, o valor contábil está sujeito a distorções decorrentes de mudanças do valor dos bens ao longo do tempo, causados, por exemplo, pela inflação, ou mesmo até pela mudança da utilidade gerada por aquele bem, ao contrário do valor de mercado.

47. Os pesos são calculados de maneira que, somados, totalizem cem por cento da constituição do capital, ou seja:

$$W_d + W_e = 1$$

48. No entanto, considerar os demonstrativos financeiros, dadas as regras contábeis até então vigentes no Brasil, pode criar grandes distorções.

---

<sup>13</sup>WACC: definition, misconceptions and errors – Pablo Fernández, 2011 – Universidad de Navarra.



Isto porque, uma das maneiras mais amplamente difundidas é o cálculo deste peso a partir de sua participação no passivo da empresa (que representa a origem dos recursos), como a seguir:

$$W_e = \frac{\text{Patrimônio Líquido} + \text{Lucros Acumulados}}{\text{Passivo Total}}$$

$$W_d = 1 - W_e$$

49. No entanto, essa forma de cálculo tende a criar grandes distorções, pois, como dito acima, o valor contábil do Patrimônio Líquido deixa de refletir o valor corrente do mesmo, enquanto que o valor da dívida que vem sendo “girada” (processo de pagamento e contratação de novas dívidas) ao longo do tempo tende a ser mais próxima dos valores correntes. Conseqüentemente, há uma subestimação do peso dos recursos próprios na composição da estrutura de capital atribuindo-se um peso maior à composição de recursos de terceiros (dívidas) na composição.

50. Uma maneira simples de se corrigir esta distorção é o uso do valor de mercado da empresa.

Conhecendo o valor de mercado da empresa e o valor corrente da dívida, é possível se reconstituir, em tese, o passivo (origem dos recursos) de uma empresa. Por conseguinte, é possível calcular o peso do capital próprio (“equity”) da seguinte maneira:

$$W_e = \frac{\text{Valor de Mercado}}{\text{Valor de Mercado} + \text{Dívidas}}$$

onde o valor de mercado simplesmente é a soma de todas as ações da empresa multiplicadas pelo seu respectivo preço.

51. Uma maneira ainda mais simples e sintética para o cálculo dos pesos seria a que leva em consideração o indicador “Debt to Equity Ratio” – em tradução literal, razão da dívida sobre os recursos próprios – que é dado por:

$$R_{DE} = \frac{D}{E}$$

Sabendo que os pesos são dados pelas fórmulas abaixo:

$$W_d = \frac{D}{D + E}$$

E:

$$W_e = \frac{E}{D + E}$$

Podemos reescrever a fórmula como:

$$R_{DE} = \frac{D}{E} = \frac{\frac{D}{D+E}}{\frac{E}{D+E}} = \frac{W_d}{W_e}$$

52. Ressalte-se que para obter a igualdade ao final da equação foram multiplicados numerador e denominador (à esquerda) pelo mesmo termo  $(D + E)$ .

Tendo em vista que a soma dos dois pesos deve ser igual a um, obtêm-se os respectivos pesos a partir da equação abaixo:

$$R_{DE} = \frac{1 - W_e}{W_e} = \frac{W_d}{1 - W_d}$$

Logo, obtêm-se os pesos a partir da relação “Debt to Equity Ratio”.

53. A proporção utilizada no relatório final FIPE sobre o custo de capital, a fim de se calcular um custo teórico médio, tomou por base observação direta no site da Reuters<sup>14</sup>, que apontava um indicador setorial que se traduziu em uma proporção de 78% de “equity” versus 22% de “debt” para a estrutura de capital.

54. Vale ressaltar que também é possível o cálculo efetivo desta proporção a partir do conhecimento da estrutura de capital alvo para a execução do projeto, desde que a mesma seja a efetiva, de maneira a não permitir distorções. Isso se explica pelo fato de que o capital próprio tende a ser mais caro que o capital de terceiros. Assim, uma empresa poderia alegar que iria usar mais capital próprio do que efetivamente estaria utilizando, com o intuito de se beneficiar de uma taxa de remuneração maior que a combinada, caso não haja o *enforcement* da estrutura efetiva.

#### **IV. Discussão e obtenção dos Modelos Candidatos para o custo dos recursos próprios: unifatorial versus multifatorial**

55. Considerando vários trabalhos acadêmicos que expõem a deficiência dos modelos atuais baseados no *Capital Asset Pricing Model - CAPM*<sup>15</sup>, um dos produtos contratados pela ARTESP à FIPE foi a obtenção de um modelo multifatorial que melhor explicasse os retornos dos papéis do setor de concessão de rodovias.

---

<sup>14</sup> Disponível em <<http://www.reuters.com/finance/stocks/financialHighlights?symbol=ECOR3.SA>>. Acessado em novembro de 2011.

<sup>15</sup> Fama, E.F. & K.R. French (1993): Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds, *Journal of Financial Economics*, Vol. 33, 3-56. Grandes, M. Demian Panigo and Ricardo Pasquini “The Cost of Equity beyond CAPM: Evidence from Latin American Stocks (1986-2004)” October 2006 Working Paper Nº 13 The American University of Paris and CEF PSE-ENS, Univ. de la Plata, CEIL-PIETTE and CEF, October 2006.

56. Tendo em vista isso, e com base na literatura consagrada<sup>16</sup>, partiu-se do pressuposto de que a inclusão de outras variáveis deveria melhorar substancialmente o poder explicativo e preditivo de tais modelos.

Assim, objetivando explicar o processo de obtenção de um modelo multifatorial, observou-se o próprio modelo CAPM (que é um modelo unifatorial) e os retornos dos ativos da seguinte maneira:

$$R_a = \beta(R_m - R_f) + R_f + \alpha + \varepsilon$$

Onde:

$R_a$  é o retorno do ativo

$R_m$  é o retorno do mercado (que pode ser aproximado por uma carteira que sintetize a variação do mercado, como o Ibovespa)

$R_f$  é a taxa livre de risco

$\alpha$  é uma constante que teoricamente deve ser igual ou próxima a zero

$\beta$  é uma constante que mede a relação risco-retorno da empresa (estimada por regressão linear)

$\varepsilon$  são as demais variações que não são explicadas pelo modelo, ou seja, o que o modelo “erra”.

57. Portanto, o retorno de um ativo deve ser explicado por um fator ( $\beta$ ) que pondera basicamente o excedente entre o retorno de mercado e seus riscos *versus* o retorno livre de risco, chegando a um fator de risco específico da empresa ou do setor e somadas ao próprio retorno livre de risco.

58. A proposta de um modelo multifatorial visa justamente a expandir a equação do modelo unifatorial, de maneira a diminuir o erro (parte do retorno que não pode ser explicado pela relação enunciada acima), e assim compondo um modelo com maior verossimilitude frente à realidade dos acontecimentos.

A fim de melhor entender a afirmação acima, utiliza-se, como exemplo, um modelo de precificação de imóveis<sup>17</sup>.

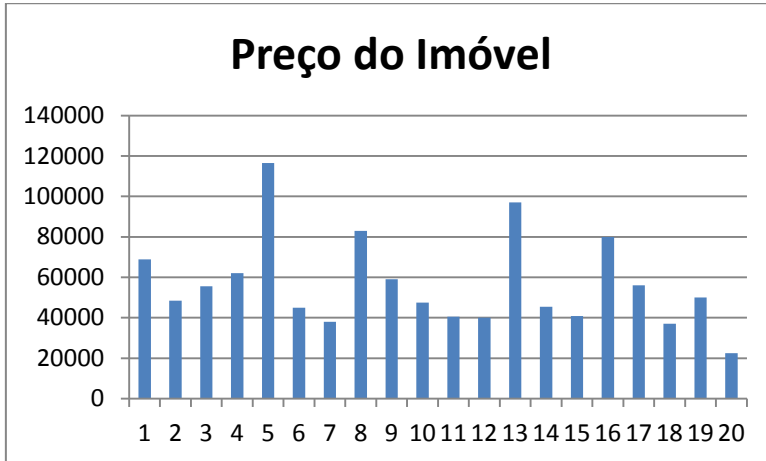
---

<sup>16</sup> Fama, E.F. & K.R. French (2004), The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence. The Journal of Economic Perspectives, 18(3), 25–46.

Fama, E.F. & K.R. French (1996), The CAPM is Wanted, Dead or Alive;

Cochrane, John. (2005). Asset Pricing. Princeton University Press. Second edition.

<sup>17</sup> McClave, Benson, and Sincich, Statistics for Business and Economics, 2002, Pearson.



59. Pode-se ter um modelo de um único fator, com o fator que imaginamos que seja o mais importante (no caso a área construída do imóvel), ou um modelo multifatorial, visando à melhor explicação possível a partir de outras variáveis disponíveis.

Exemplo:

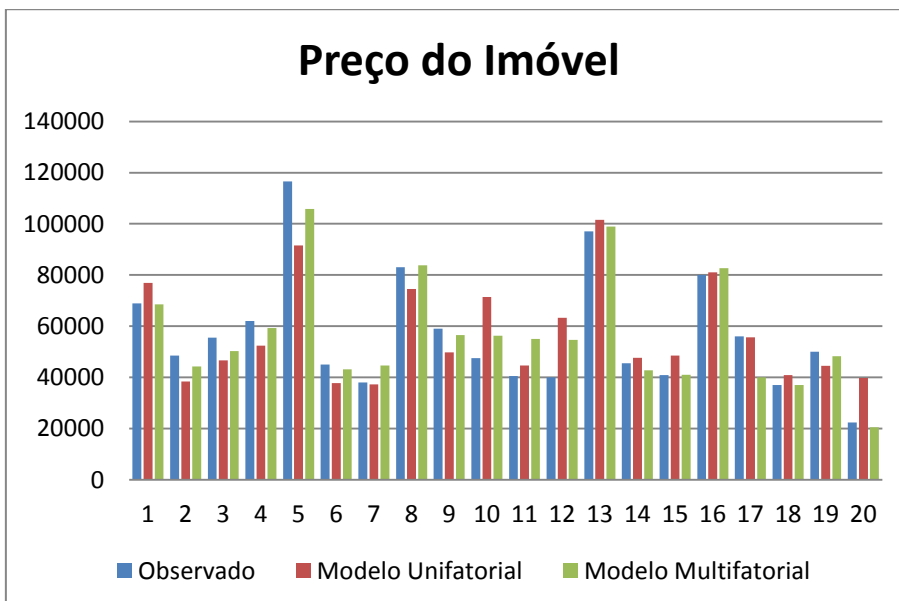
- Modelo Unifatorial:

$$\text{Preço do Imóvel} = \beta_0 + \beta_1 \text{Área}$$

- Modelo Multifatorial:

$$\begin{aligned} \text{Preço do Imóvel} &= \beta_0 + \beta_1 \text{Valor do metro quadrado} \\ &+ \beta_2 \text{Melhorias Feitas na Casa} + \beta_3 \text{Área} \end{aligned}$$

Percebe-se que o poder explicativo do segundo modelo deverá ser superior ao do primeiro modelo, pois é intuitivo que a inclusão de variáveis explicativas irá melhorar o conhecimento sobre o problema em questão.



60. Assim, o mesmo ocorre quando se modelam problemas mais complexos como, por exemplo, os retornos de um ativo financeiro.

61. Ao invés de se ater a um modelo unifatorial, é proposto um modelo multifatorial que tenha um poder explicativo superior ao CAPM.

Consequentemente se estende o modelo na seguinte equação:

$$R_a = \beta(R_m - R_f) + R_f + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \dots + \beta_ix_i + \varepsilon$$

onde os demais termos são os parâmetros ( $\beta_i$ ), que ponderam fatores ( $x_i$ ) que devem explicar o retorno dos ativos.

62. Dentre as variáveis testadas nos modelos multifatoriais, foram contemplados e analisados os possíveis impactos de:

- Taxa de câmbio do Dólar *versus* Real (US\$ *versus* R\$)
- VIX – *Volatility Index*: índice de volatilidade implícita nas opções sobre o Standard & Poor's 500 (índice com as 500 maiores empresas de capital aberto com ações negociadas nos Estados Unidos) –, pois a volatilidade tende a ser uma das variáveis usuais para se medir a aversão ao risco do investidor.
- Índice Sharpe do Nasdaq nos EUA: excesso de retorno das ações do setor de tecnologia (".com") por unidade de risco
- Índice dos preços de moradias nos EUA, "Case Shiller" capturando variações no mercado imobiliário dos EUA
- Uma variável "dummy" (de efeito fixo) acerca da crise financeira de Setembro de 2008
- Imobilizado / Ativo Total
- Índice de Preço sobre Lucro das Ações
- Índice de Preço sobre Valor Patrimonial
- Valor da Empresa / EBITDA (Ganhos antes dos Lucros, Despesas com Juros, Impostos, Depreciação e Amortização)
- Alavancagem Financeira (que teoricamente implica em risco financeiro)
- Efeitos fixos sobre as próprias empresas (Ex: se o fato de ser a "XPTO", o mercado tenha algum viés ou preferência sobre seus determinados papéis)
- Modelagem da volatilidade dos próprios preços por tratamento estatístico a fim de detectar situações de "stress" do mercado (Modelos do tipo ARCH / GARCH)<sup>18</sup>

63. Não obstante, vale ressaltar que o processo de estimação adotado pela FIPE foi a técnica de *cross-section* longitudinal e métodos de séries temporais, que consiste na estimação conjunta de todas as empresas, para que se estime todos os parâmetros, minimizando os erros para o conjunto de todo o mercado ao invés de se obter uma média de cada parâmetro, a partir de estimações em separado.

64. Tal abordagem tende a ampliar significativamente a confiabilidade dos parâmetros obtidos<sup>19</sup>, pois se aumenta a amostragem no algoritmo de busca dos parâmetros que melhor

<sup>18</sup> Engle, R. F. "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation." *Econometrica*, Vol. 50, No. 4 (Jul., 1982), pp. 987-1007.

<sup>19</sup> Wooldridge, J. M. (2002). *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data*. MIT Press.

explicam o conjunto de dados, evitando a introdução de artificialidades e distorções inerentes à aplicação direta da média sobre os operadores quando estimados em separado.

65. O painel de empresas considerado para a amostragem foi estabelecido segundo o critério de segmentação sobre empresas de utilidade pública regulada que não tivessem anomalias estatisticamente significativas em seus retornos ao longo dos últimos anos. Com base neste critério econômico objetivo obteve-se o seguinte painel de empresas:

companhia	Freq.	Percent	Cum.	
Co1	AES TIETE	64	3.96	3.96
Co2	ALL	64	3.96	7.93
Co3	BR TELECOM	64	3.96	11.89
Co4	CCR	64	3.96	15.85
Co5	CEB	67	4.15	20.00
Co6	CELESC	64	3.96	23.96
Co7	CEMAR	64	3.96	27.93
Co8	CEMAT	64	3.96	31.89
Co9	CEMIG	49	3.03	34.92
Co10	CESP	64	3.96	38.89
Co11	COMGAS	64	3.96	42.85
Co12	COPEL	64	3.96	46.81
Co13	CPFL	64	3.96	50.77
Co14	ELETROBRAS	43	2.66	53.44
Co15	ELETROPAULO	64	3.96	57.40
Co16	EMBRATEL	64	3.96	61.36
Co17	GOL	64	3.96	65.33
Co18	LIGHT SA	64	3.96	69.29
Co19	OHL	64	3.96	73.25
Co20	SABESP	64	3.96	77.21
Co21	TAM	64	3.96	81.18
Co22	TELEFONICA (VIVO)	64	3.96	85.14
Co23	TELEMAR N L	64	3.96	89.10
Co24	TIM	64	3.96	93.07
Co25	TRACTEBEL	64	3.96	97.03
Co26	TRIUNFO	48	2.97	100.00
	Total	1,615	100.00	

66. Assim, tendo as variáveis (e conseqüentemente, os modelos multifatoriais alternativos) em mente, e escolhidas as empresas que compõem o painel de estimação, deve-se testar as diversas combinações delas, a fim de avaliar tanto o poder explicativo, quanto a significância estatística dos seus respectivos parâmetros nas equações obtidas.

67. Os testes sobre a relevância de cada parâmetro são baseados na “estatística T” que apura a razão entre o valor esperado do parâmetro e o seu erro padrão, cujo valor é dado pelo estimador econométrico fornecido por qualquer programa estatístico<sup>20</sup>.

68. O resultado dessa operação é comparado frente a uma distribuição de probabilidades (“T-Student”) que permite a inferência de informações de uma população a partir da análise de uma determinada amostra (população = universo e amostra = subconjunto do universo)<sup>21</sup>.

69. Tendo selecionado as variáveis que sejam estatisticamente significativas, foi utilizado o procedimento de “backtest” para escolha do melhor modelo, descrito na seção adiante.

<sup>20</sup>McClave, Benson, and Sincich, Statistics for Business and Economics, 2002, Pearson.

<sup>21</sup>MathWorld from Wolfram Institute<<http://mathworld.wolfram.com/Studentst-Distribution.html>>

## V. Da escolha do melhor modelo via critério de “backtest”

70. No intuito de escolher o melhor modelo, foi adotado o critério de “backtest” que, em suma, é um teste de aderência de pontos escolhidos fora da amostra utilizada para o processo de inferência dos parâmetros.

71. Para condensar esse teste de aderência em um número que possibilite o ranqueamento dos modelos, utiliza-se o critério da “Soma dos Resíduos Quadráticos”, que é um critério estatístico em que se eleva ao quadrado as distâncias entre o ocorrido *versus* o previsto, para evitar que, ao somar essas distâncias, erros positivos se anulem com erros negativos.

Assim, a fórmula para o critério mencionado acima é:

$$SRQ = \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

onde:

$N$  é o número de pontos a serem verificados

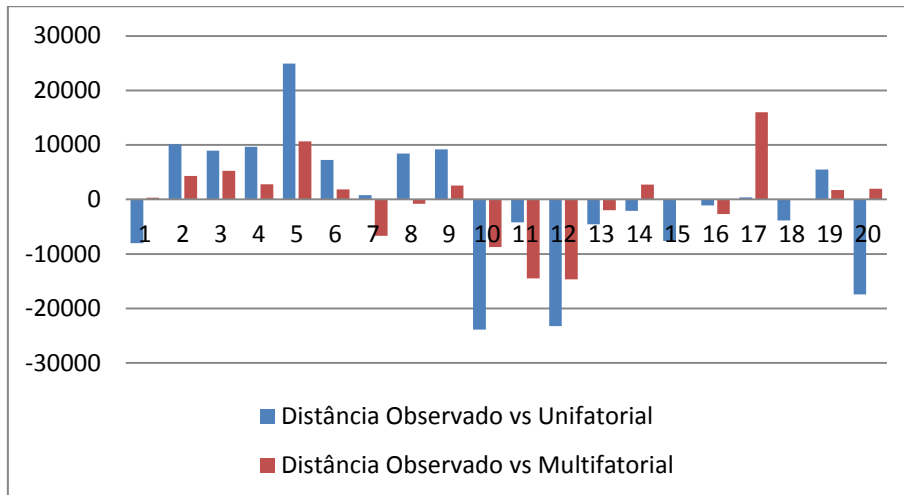
$Y_i$  é a  $i$ -ésima observação (ocorrido)

$\hat{Y}_i$  é a  $i$ -ésima previsão (previsto)

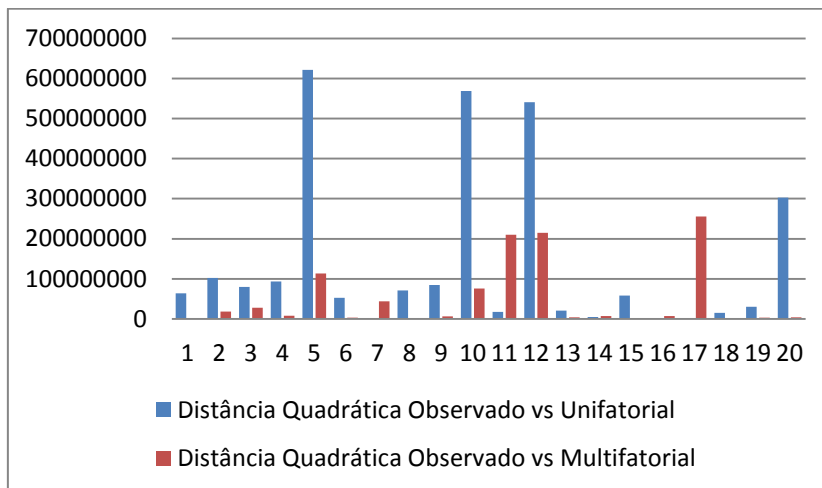
72. Ao considerar a distância quadrática (pois a diferença é elevada ao quadrado) entre cada observação ( $Y_i$ ) e cada previsão ( $\hat{Y}_i$ ), se ( $Y_i - \hat{Y}_i$ ) for um número negativo, ao elevá-lo ao quadrado é obtido um número positivo; se for um número positivo, ao elevá-lo ao quadrado é também obtido um número positivo.

73. Assim, quando se soma cada distância quadrática, evita-se uma possível anulação de valores entre distâncias positivas e negativas.

74. Voltando ao modelo de precificação de imóveis, para melhor entender o critério de soma dos resíduos quadráticos, sejam os imóveis representados (cada imóvel) no eixo horizontal, e a distância entre observado e previsto no eixo vertical, se obtém o gráfico abaixo:



75. Ao elevar essas distâncias ao quadrado, obtém-se uma distância sempre positiva, conforme gráfico abaixo:



76. Por conseguinte, quanto menor o conjunto geral das distâncias quadráticas (conclusão esta que pode ser obtida somando seus elementos), mais perto está o conjunto das observações em relação às previsões, permitindo a escolha objetiva, não passível de manipulações, do modelo que melhor explica o custo do capital dos acionistas.

## VI. Conclusão

77. De tudo o que acima se expôs, especialmente da metodologia apresentada e da adoção de modelo multifatorial, chegou-se a um número que, ponderado pelas despesas financeiras da dívida e seu respectivo impacto tributário, posteriormente deflatado, compôs, juntamente com o custo médio dos recursos próprios (“equity”), o custo médio ponderado de capital.

78. Como fator de ponderação deste custo foi considerada a alavancagem financeira pesquisada em fontes de mercado.



79. As estimativas apresentadas nesta Nota Técnica são reflexo do painel amostral e de seu respectivo corte temporal utilizado, podendo mudar em futuras estimações, que objetivarão capturar as mudanças ocorridas no mercado até então.

80. Esta Nota Técnica também apresentou as metodologias para obtenção dos resultados em cada período que compõe o fluxo de caixa marginal, que refletem as expectativas em relação às operações da empresa.

81. Assim, apresenta-se um novo instrumento financeiro capaz de viabilizar investimentos não previstos originalmente, mas que atendam ao interesse público frente às mudanças conjunturais, tanto em relação à operação das concessões, as quais não previam a necessidade de tais investimentos adicionais, quanto em relação ao ambiente macroeconômico, que pauta uma nova realidade de tomada de decisão sobre investimentos. O resultado está consolidado na minuta de Resolução integrante desta Nota, que ora submetemos à apreciação superior.

82. Sugere-se, portanto, e tendo em vista as contribuições recebidas pela Consulta Pública nº01/2012, realizada nos termos da Lei. 10.177/98, a submissão da Nota Técnica à aprovação pelo Conselho Diretor, juntamente com a minuta de Resolução anexa.

## Apêndice – Construção de um estimador econométrico simples

Os problemas em econometria geralmente se baseiam no estabelecimento de uma relação empírica entre conjuntos de dados, sob a forma de alguma função matemática, como por exemplo  $y(\beta) = f(\beta)$ , onde  $\beta$  é um vetor de parâmetros, e  $y$  é a variável a ser explicada em termos deste vetor de parâmetros  $\beta$ .

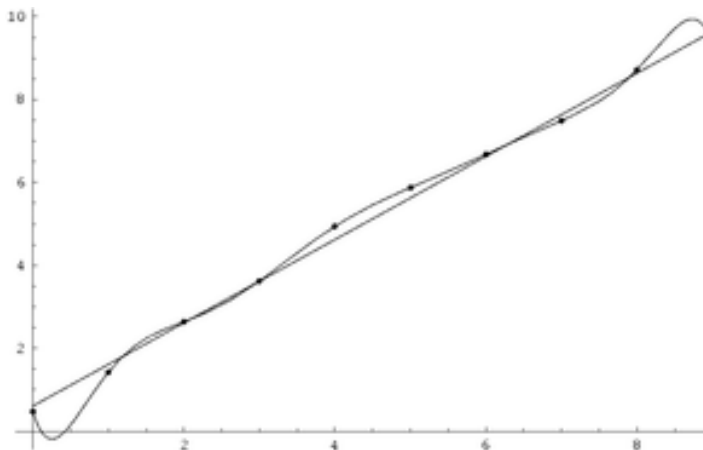
Assim, o problema acima poderia ser re-enunciado como um problema de ajuste de curva dado um conjunto de pontos, onde tal curva pode ser de qualquer forma, com esta forma determinada por uma **matriz de desenho**.

Consequentemente, de acordo com esta **matriz de desenho**, é possível obter uma função de linha reta, um polinômio de qualquer grau, uma relação linear múltipla, ou qualquer outra relação que possa ser expressa como uma equação como a que foi apresentada nesta Nota Técnica. (modelo multifatorial, ou a equação de preço de casas).

Enunciando o problema (em notação matricial):

$$xM = y$$

Seja  $M$  a **matriz de desenho**,  $x$  é a matriz de variáveis explicativas, e  $y$  é o vetor da variável a ser explicada, é possível obter uma função que se ajusta aos pontos dados com um grau de complexidade / poder de extrapolação desejados:



**Gráfico 1 – Dados com ruídos em torno de uma tendência determinística. É possível ter um ajustamento de curva perfeito a partir de um polinômio de grau “n”, que irá causar o problema de “overfitting” – que é a falta de capacidade do modelo de descrever pontos fora da amostra de estimação, ou encontrar uma linha reta que minimize o erro, dependendo da escolha da matriz de desenho. Esta imagem foi copiada daWikipedia.**

Assim a ideia principal é encontrar os coeficientes da matriz de desenho que minimizem a distância dos pontos observados versus a função obtida.

A fim de entender as demonstrações e manipulações matemáticas que se seguem, é necessário algum conhecimento em cálculo diferencial e álgebra linear. Com isso, o leitor atento será capaz de replicar parte do processo de estimação, que é fundamentado no estimador de mínimos quadrados ordinário.

Como dito anteriormente, seja o problema escrito pela seguinte equação:

$$xM = y$$

E, desta expressão, o objetivo principal do estimador econométrico é obter uma matriz de desenho (M) que minimize a distância entre a função estabelecida no lado esquerdo da equação e as observações à direita da equação. Assim podemos pensar como minimizar a distância entre ambos os lados da equação através da matriz (M). Seja a distância quadrática dos dois lados da equação dada por:

$$D = (y - xM)^T(y - xM)$$

Em outras palavras, a distância proposta acima é a soma do quadrado da diferença entre cada observação e cada previsão.

Fazendo uso das seguintes relações do cálculo de matrizes, que são basicamente uma extensão do cálculo tradicional escalar, tem-se:

$$\frac{\partial x^T a}{\partial x} = \frac{\partial a^T x}{\partial x} = a$$

$$\partial(XY) = \partial(X)Y + \partial(Y)X$$

$$\partial A = 0$$

\*A é uma constante.

Assim, é possível verificar que:

$$\frac{\partial(Bx + b)^T C(Dx + d)}{\partial x} = B^T C(Dx + d) + C^T D^T(Bx + b)$$

Por conseguinte, é possível minimizar a distância acima através do uso da derivada da relação da distância e igualar a zero (que será um candidato a mínimo da função da distância):

$$\frac{\partial D}{\partial M} = \frac{\partial(y - xM)^T(y - xM)}{\partial M} = -x^T(y - xM) - x^T(y - xM) = -2x^T(y - xM)$$

E, fazendo:

$$\frac{\partial D}{\partial M} = 0$$

Então, segue que:

$$-2x^T(y - xM) = 0$$

$$-x^T(y - xM) = 0$$

$$-x^T y + x^T xM = 0$$

$$x^T xM = x^T yM = (x^T x)^{-1} (x^T y)$$

Assim, é possível reproduzir e entender o processo de estimação mais usual em econometria, no qual os modelos multifatoriais se apoiam que é a regressão linear múltipla por mínimos quadrados.